Réseaux linéaires en régime sinusoïdal établi

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

lundi 29 novembre 2021

- on a étudié la réponse d'un oscillateur harmonique en régime sinusoïdal établi (RSE) en fonction de la fréquence, au moyen de la représentation complexe

- on a étudié la réponse d'un oscillateur harmonique en régime sinusoïdal établi (RSE) en fonction de la fréquence, au moyen de la représentation complexe
- valable en particulier pour un circuit RLC série :

- on a étudié la réponse d'un oscillateur harmonique en régime sinusoïdal établi (RSE) en fonction de la fréquence, au moyen de la représentation complexe
- valable en particulier pour un circuit RLC série :
- cet outil est approprié pour tout circuit linéaire

- on a étudié la réponse d'un oscillateur harmonique en régime sinusoïdal établi (RSE) en fonction de la fréquence, au moyen de la représentation complexe
- valable en particulier pour un circuit RLC série :
- cet outil est approprié pour tout circuit linéaire
- chaque dipôle sera caractérisé par une fonction complexe de ω, l'impédance complexe

- on a étudié la réponse d'un oscillateur harmonique en régime sinusoïdal établi (RSE) en fonction de la fréquence, au moyen de la représentation complexe
- valable en particulier pour un circuit RLC série :
- cet outil est approprié pour tout circuit linéaire
- chaque dipôle sera caractérisé par une fonction complexe de ω, l'impédance complexe
- on retrouvera l'équivalent de la loi d'Ohm sur les $\underline{U}$ et $\underline{I}$, valable pour tout dipôle linéaire : toutes les lois du régime stationnaire seront valables en régime sinusoïdal établi

- on a étudié la réponse d'un oscillateur harmonique en régime sinusoïdal établi (RSE) en fonction de la fréquence, au moyen de la représentation complexe
- valable en particulier pour un circuit RLC série :
- cet outil est approprié pour tout circuit linéaire
- chaque dipôle sera caractérisé par une fonction complexe de ω, l'impédance complexe
- on retrouvera l'équivalent de la loi d'Ohm sur les $\underline{U}$ et $\underline{I}$, valable pour tout dipôle linéaire : toutes les lois du régime stationnaire seront valables en régime sinusoïdal établi
- on pourra déterminer par exemple les fréquences de résonance de circuits électroniques : détection du signal reçu par une antenne, fréquence d'oscillateurs électroniques (montres, émetteurs RF/Wifi)

- on a étudié la réponse d'un oscillateur harmonique en régime sinusoïdal établi (RSE) en fonction de la fréquence, au moyen de la représentation complexe
- valable en particulier pour un circuit RLC série :
- cet outil est approprié pour tout circuit linéaire
- chaque dipôle sera caractérisé par une fonction complexe de ω, l'impédance complexe
- on retrouvera l'équivalent de la loi d'Ohm sur les $\underline{U}$ et $\underline{I}$, valable pour tout dipôle linéaire : toutes les lois du régime stationnaire seront valables en régime sinusoïdal établi
- on pourra déterminer par exemple les fréquences de résonance de circuits électroniques : détection du signal reçu par une antenne, fréquence d'oscillateurs électroniques (montres, émetteurs RF/Wifi)
- on pourra caractériser la réponse en fréquence d'un système électronique (amplificateur hifi)

- on a étudié la réponse d'un oscillateur harmonique en régime sinusoïdal établi (RSE) en fonction de la fréquence, au moyen de la représentation complexe
- valable en particulier pour un circuit RLC série :
- cet outil est approprié pour tout circuit linéaire
- chaque dipôle sera caractérisé par une fonction complexe de ω, l'impédance complexe
- on retrouvera l'équivalent de la loi d'Ohm sur les $\underline{U}$ et $\underline{I}$, valable pour tout dipôle linéaire : toutes les lois du régime stationnaire seront valables en régime sinusoïdal établi
- on pourra déterminer par exemple les fréquences de résonance de circuits électroniques : détection du signal reçu par une antenne, fréquence d'oscillateurs électroniques (montres, émetteurs RF/Wifi)
- on pourra caractériser la réponse en fréquence d'un système électronique (amplificateur hifi)
- cette étude est nécessaire pour comprendre l'excitation résonante d'une balançoire, absorption/émission de rayonnement éléctromagnétique par un atome à une/des longueurs d'ondes particulières…

1. Impédance complexe

2. Lois générales des circuits linéaires en régime sinusoïdal établi

3. Puissance en régime sinusoïdal établi (HP)

Analogie électromécanique

- RLC série alimenté en sinusoïdal à ω par un GBF d'amplitude E :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u_c=\omega_0^2E\cos(\omega t)$$

avec : $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ $\quad Q=\dfrac{1}{RC\omega_0}$

Analogie électromécanique

- RLC série alimenté en sinusoïdal à ω par un `GBF` d'amplitude E :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E\cos(\omega t) \qquad \text{avec :} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{RC\omega_0}$$

- de même pour tout oscillateur mécanique :

Analogie électromécanique

- RLC série alimenté en sinusoïdal à ω par un GBF d'amplitude E :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E\cos(\omega t) \qquad \text{avec :} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{RC\omega_0}$$

- de même pour tout oscillateur mécanique :

Analogie électromécanique

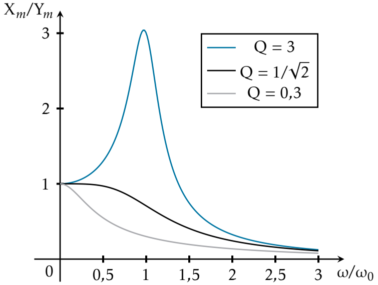
- RLC série alimenté en sinusoïdal à ω par un `GBF` d'amplitude E :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E\cos(\omega t) \qquad \text{avec :} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{RC\omega_0}$$

- de même pour tout oscillateur mécanique :

Résonance en élongation pour

$Q > 1/\sqrt{2}$



Valable pour u_C, q

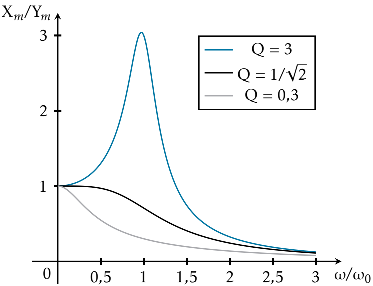
Analogie électromécanique

- RLC série alimenté en sinusoïdal à ω par un GBF d'amplitude E :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E\cos(\omega t) \qquad \text{avec : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{RC\omega_0}$$

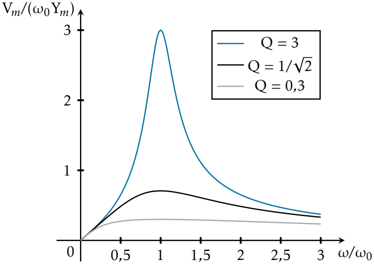
- de même pour tout oscillateur mécanique :

Résonance en élongation pour $Q > 1/\sqrt{2}$



Valable pour u_c, q

Résonance en vitesse pour tout Q



Valable pour u_R, i

Circuit linéaire stable

on va généraliser l'étude en sinusoïdal complexe à tout circuit linéaire stable

Circuit linéaire stable

on va généraliser l'étude en sinusoïdal complexe à tout circuit linéaire stable

La réponse d'un circuit linéaire à une excitation sinusoïdale à ω est la somme :

- d'un régime transitoire,

Circuit linéaire stable

on va généraliser l'étude en sinusoïdal complexe à tout circuit linéaire stable

La réponse d'un circuit linéaire à une excitation sinusoïdale à ω est la somme :

- d'un régime transitoire,
- d'un régime sinusoïdal à ω, dit établi.

Circuit linéaire stable

on va généraliser l'étude en sinusoïdal complexe à tout circuit linéaire stable

La réponse d'un circuit linéaire à une excitation sinusoïdale à ω est la somme :

- d'un régime transitoire,
- d'un régime sinusoïdal à ω, dit établi.

Circuit linéaire stable

on va généraliser l'étude en sinusoïdal complexe à tout circuit linéaire stable

La réponse d'un circuit linéaire à une excitation sinusoïdale à ω est la somme :

- d'un régime transitoire,
- d'un régime sinusoïdal à ω, dit établi.

On ne s'intéresse qu'à la composante sinusoïdale à ω :

Circuit linéaire stable

on va généraliser l'étude en sinusoïdal complexe à tout circuit linéaire stable

La réponse d'un circuit linéaire à une excitation sinusoïdale à ω est la somme :

- d'un régime transitoire,
- d'un régime sinusoïdal à ω, dit établi.

On ne s'intéresse qu'à la composante sinusoïdale à ω :

Définition (Circuit linéaire stable)

Un circuit linéaire est dit stable en régime sinusoïdal établi (ou permanent) si :

- toutes les tensions $u_n(t)$ et intensités $i_n(t)$ du régime transitoire tendent vers 0,
- toutes les tensions $u_n(t)$ et intensités $i_n(t)$ du régime sinusoïdal établi sont bornées.

Circuit linéaire stable

on va généraliser l'étude en sinusoïdal complexe à tout circuit linéaire stable

La réponse d'un circuit linéaire à une excitation sinusoïdale à ω est la somme :

- d'un régime transitoire,
- d'un régime sinusoïdal à ω, dit établi.

On ne s'intéresse qu'à la composante sinusoïdale à ω :

Définition (Circuit linéaire stable)

Un circuit linéaire est dit stable en régime sinusoïdal établi (ou permanent) si :

- toutes les tensions $u_n(t)$ et intensités $i_n(t)$ du régime transitoire tendent vers 0,
- toutes les tensions $u_n(t)$ et intensités $i_n(t)$ du régime sinusoïdal établi sont bornées.

On n'étudiera que des circuits stables.

Impédance

Un dipôle linéaire passif est caractérisé en régime sinusoïdal établi dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, par une impédance $\underline{Z} = Ze^{j\varphi_Z}$, $(Z > 0, \varphi \in \mathbb{R})$ complexe, telle que, en convention récepteur, à chaque instant :

$$\frac{\underline{U}(t)}{\underline{I}(t)} = \frac{\underline{U_m}}{\underline{I_m}} = \underline{Z}.$$

On a donc :

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m} \quad \text{et : } \varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I.$$

Impédance

Un dipôle linéaire passif est caractérisé en régime sinusoïdal établi dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, par une impédance $\underline{Z} = Ze^{j\varphi_Z}$, $(Z > 0, \varphi \in \mathbb{R})$ complexe, telle que, en convention récepteur, à chaque instant :

$$\frac{\underline{U}(t)}{\underline{I}(t)} = \frac{\underline{U_m}}{\underline{I_m}} = \underline{Z}.$$

On a donc :

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m} \quad \text{et : } \varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I.$$

En régime sinusoïdal établi :

réel	$u(t) = U_m \cos\left(\omega t + \varphi_u\right)$	$i(t) = I_m \cos\left(\omega t + \varphi_i\right)$
complexe	$\underline{U}(t) = \underline{U_m} e^{j\omega t}$	$\underline{I}(t) = \underline{I_m} e^{j\omega t}$

Équation caractéristique pour un dipôle passif linéaire :

$$\sum_n \alpha_n \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}t^n} + \sum_n \beta_n \frac{\mathrm{d}^n i}{\mathrm{d}t^n} = 0 \rightarrow \sum_n (j\omega)^n \alpha_n \underline{U}_m e^{j\omega t} = -\sum_n (j\omega)^n \beta_n \underline{I}_m e^{j\omega t}$$

Impédance

Un dipôle linéaire passif est caractérisé en régime sinusoïdal établi dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, par une impédance $\underline{Z} = Ze^{j\varphi_Z}$, $(Z > 0, \varphi \in \mathbb{R})$ complexe, telle que, en convention récepteur, à chaque instant :

$$\frac{\underline{U}(t)}{\underline{I}(t)} = \frac{\underline{U_m}}{\underline{I_m}} = \underline{Z}.$$

On a donc :

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m} \quad \text{et : } \varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I.$$

En régime sinusoïdal établi :

réel	$u(t) = U_m \cos\left(\omega t + \varphi_u\right)$	$i(t) = I_m \cos\left(\omega t + \varphi_i\right)$
complexe	$\underline{U}(t) = \underline{U_m} e^{j\omega t}$	$\underline{I}(t) = \underline{I_m} e^{j\omega t}$

Équation

caractéristique pour un dipôle passif linéaire :

$$\sum_n \alpha_n \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}t^n} + \sum_n \beta_n \frac{\mathrm{d}^n i}{\mathrm{d}t^n} = 0 \rightarrow \sum_n (j\omega)^n \alpha_n \underline{U}_m e^{j\omega t} = -\sum_n (j\omega)^n \beta_n \underline{I}_m e^{j\omega t}$$

Il existe Z tel que :

Résistance et réactance

Définition (Résistance et réactance)

On nomme respectivement résistance et réactance les parties réelle et imaginaire de $\underline{Z}$.

$$\underline{Z} = R + jS \quad \begin{cases} R : \text{résistance} & = \mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right) \\ S : \text{réactance} & = \mathrm{Im}\left(\underline{Z}\right) \end{cases}$$

On définit également l'admittance :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jB \quad \begin{cases} G : \text{conductance} & = \mathrm{Re}\left(\underline{Y}\right) \\ B : \text{susceptance} & = \mathrm{Im}\left(\underline{Y}\right) \end{cases}$$

La représentation dans le plan complexe de $\underline{Z}$ est nommée représentation de Fresnelde $\underline{Z}$.

Résistance et réactance

Définition (Résistance et réactance)

On nomme respectivement résistance et réactance les parties réelle et imaginaire de $\underline{Z}$.

$$\underline{Z} = R + jS \quad \begin{cases} R : \text{résistance} & = \mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right) \\ S : \text{réactance} & = \mathrm{Im}\left(\underline{Z}\right) \end{cases}$$

- extensions complexes de la résistance et de la conductance : $\underline{Z}$ en Ω et $\underline{Y}$ en S

Résistance et réactance

Définition (Résistance et réactance)

On nomme respectivement résistance et réactance les parties réelle et imaginaire de $\underline{Z}$.

$$\underline{Z} = R + jS \qquad \begin{cases} R \text{ : résistance} & = \mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right) \\ S \text{ : réactance} & = \mathrm{Im}\left(\underline{Z}\right) \end{cases}$$

- extensions complexes de la résistance et de la conductance : $\underline{Z}$ en Ω et $\underline{Y}$ en S
- $\varphi(\underline{Z})$ représente l'avance de $u(t)$ par rapport à $i(t)$

Résistance et réactance

Définition (Résistance et réactance)

On nomme respectivement résistance et réactance les parties réelle et imaginaire de $\underline{Z}$.

$$\underline{Z} = R + jS \qquad \begin{cases} R : \text{résistance} & = \mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right) \\ S : \text{réactance} & = \mathrm{Im}\left(\underline{Z}\right) \end{cases}$$

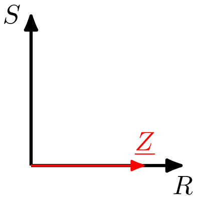
- extensions complexes de la résistance et de la conductance : $\underline{Z}$ en Ω et $\underline{Y}$ en S
- $\varphi(\underline{Z})$ représente l'avance de $u(t)$ par rapport à $i(t)$
- on notera $\underline{Z}(j\omega)$: fraction rationnelle en $j\omega$: son amplitude et sa phase dépendent de la pulsation du régime établi

Résistor

L'impédance d'un résistor est sa résistance :
$\underline{Z} = R$:

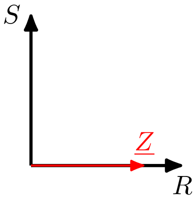
Résistor

L'impédance d'un résistor est sa résistance :
$\underline{Z} = R$:



Résistor

L'impédance d'un résistor est sa résistance :
$\underline{Z} = R$:



$\varphi = 0$ illustre que u et i sont en phase quelle que soit la fréquence.

Condensateur

L'impédance d'un condensateur idéal est, en convention récepteur :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega} \rightarrow S < 0.$$

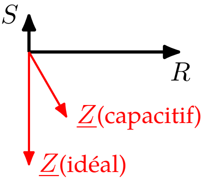
Tout dipôle de réactance négative est dit capacitif.

Condensateur

L'impédance d'un condensateur idéal est, en convention récepteur :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega} \rightarrow S < 0.$$

Tout dipôle de réactance négative est dit capacitif.

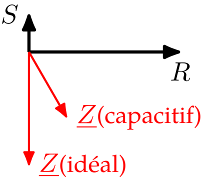


Condensateur

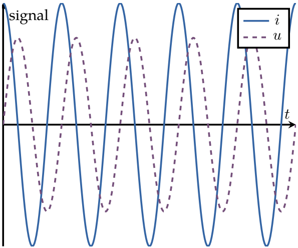
L'impédance d'un condensateur idéal est, en convention récepteur :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega} \rightarrow S < 0.$$

Tout dipôle de réactance négative est dit capacitif.



- $\varphi_Z = -\pi/2$: u est en quadrature retard par rapport à i

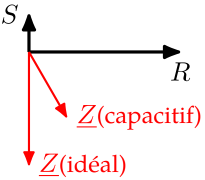


Condensateur

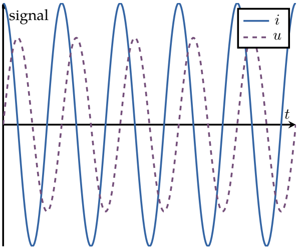
L'impédance d'un condensateur idéal est, en convention récepteur :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega} \rightarrow S < 0.$$

Tout dipôle de réactance négative est dit capacitif.



- $\varphi_Z = -\pi/2$: u est en quadrature retard par rapport à i
- $|\underline{Z}| \underset{\omega \to 0}{\rightarrow} \infty$: on retrouve l'interrupteur ouvert en régime stationnaire

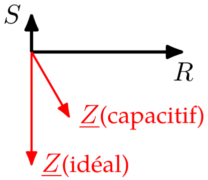


Condensateur

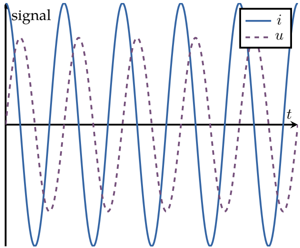
L'impédance d'un condensateur idéal est, en convention récepteur :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega} \rightarrow S < 0.$$

Tout dipôle de réactance négative est dit capacitif.



- $\varphi_Z = -\pi/2$: u est en quadrature retard par rapport à i
- $|\underline{Z}| \underset{\omega\rightarrow 0}{\rightarrow} \infty$: on retrouve l'interrupteur ouvert en régime stationnaire
- $|\underline{Z}| \underset{\omega\rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$: le condensateur idéal est équivalent à un interrupteur fermé à haute fréquence



Bobine

L'impédance d'une bobine idéale est :

$$\underline{Z}_L = jL\omega \rightarrow S > 0.$$

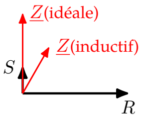
Tout dipôle de réactance positive est dit inductif.

Bobine

L'impédance d'une bobine idéale est :

$$\underline{Z}_L = jL\omega \rightarrow S > 0.$$

Tout dipôle de réactance positive est dit inductif.

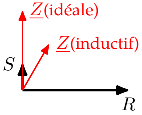


Bobine

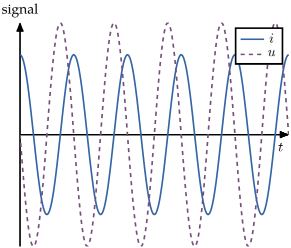
L'impédance d'une bobine idéale est :

$$\underline{Z}_L = jL\omega \rightarrow S > 0.$$

Tout dipôle de réactance positive est dit inductif.



- $\varphi_L = \pi/2$: u est en quadrature avance par rapport à i

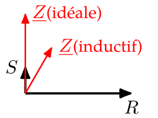


Bobine

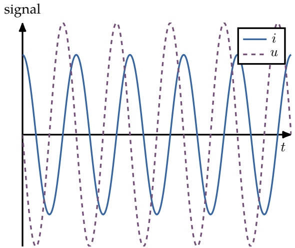
L'impédance d'une bobine idéale est :

$$\underline{Z}_L = jL\omega \rightarrow S > 0.$$

Tout dipôle de réactance positive est dit inductif.



- $\varphi_L = \pi/2$: u est en quadrature avance par rapport à i
- $|\underline{Z}| \xrightarrow[\omega\to 0]{} 0$: on retrouve l'interrupteur fermé en régime stationnaire

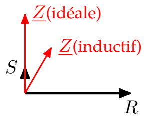


Bobine

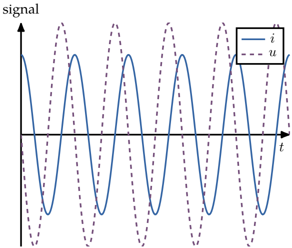
L'impédance d'une bobine idéale est :

$$\underline{Z}_L = jL\omega \rightarrow S > 0.$$

Tout dipôle de réactance positive est dit inductif.



- $\varphi_L = \pi/2$: u est en quadrature avance par rapport à i
- $|\underline{Z}| \underset{\omega\to 0}{\rightarrow} 0$: on retrouve l'interrupteur fermé en régime stationnaire
- $|\underline{Z}| \underset{\omega\to\infty}{\rightarrow} \infty$: la bobine idéale est équivalente à un interrupteur ouvert à haute fréquence



Impédance mécanique

On utilise l'analogie mécanique/électrocinétique : $(u, i) \leftrightarrow (F, v)$.

Impédance mécanique

On utilise l'analogie mécanique/électrocinétique : $(u,i) \leftrightarrow (F,v)$.

Définition (Impédance mécanique)

On définit l'impédance mécanique d'un système mécanique en régime sinusoïdal établi par :

$$\underline{Z}_{\text{méca}} = \underline{F}(t)/\underline{v}(t) = \underline{F_m}/\underline{V_m}.$$

Impédance mécanique

On utilise l'analogie mécanique/électrocinétique : $(u,i) \leftrightarrow (F,v)$.

Définition (Impédance mécanique)

On définit l'impédance mécanique d'un système mécanique en régime sinusoïdal établi par :

$$\underline{Z}_{\text{méca}} = \underline{F}(t)/\underline{v}(t) = \underline{F_m}/\underline{V_m}.$$

$\underline{Z}_{\text{méca}}$ est en $\mathrm{N \cdot s \cdot m^{-1}}$ et non en Ω.

1. Impédance complexe

2. Lois générales des circuits linéaires en régime sinusoïdal établi

3. Puissance en régime sinusoïdal établi (HP)

Dans l'approximation des régimes quasi stationnaires (ω suffisamment faible) :

Lois de Kirchhoff

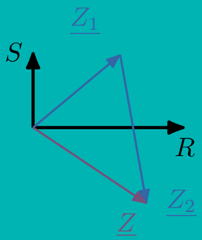
En régime sinusoïdal établi dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, les lois de Kirchhoff s'écrivent :

$$\sum_p \varepsilon_p \underline{U_{pm}} = 0 \text{ sur une maille orientée et : } \sum_p \varepsilon_p \underline{I_{pm}} = 0 \text{ à un nœud.}$$

On en déduit :

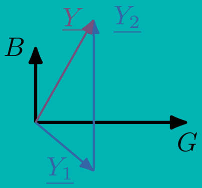
Impédance d'une association série de dipôles

$$\underline{Z} = \sum_p \underline{Z_p}$$



Admittance d'une association parallèle de dipôles

$$\underline{Y} = \sum_p \underline{Y_p}$$



Les relations des ponts

diviseur de tension $\underline{U_{nm}} = \dfrac{\underline{Z_n}}{\sum_p \underline{Z_p}} \underline{U_{0m}},$

diviseur de courant $\underline{I_{nm}} = \dfrac{\underline{Y_n}}{\sum_p \underline{Y_p}} \underline{I_{0m}},$

Exercice

1. Déterminer l'impédance d'un dipôle RLC série en régime sinusoïdal établi en fonction de R, L, C et ω. Établir sa représentation de Fresnel pour $\omega \geqslant 1/\sqrt{LC}$ et $\omega \leqslant 1/\sqrt{LC}$.
2. En déduire l'amplitude complexe du courant $\underline{I_m}$ le traversant, en fonction de la tension $\underline{U_m}$ à ses bornes (en convention récepteur). Retrouver la résonance en courant du dipôle. Illustrer par une construction de Fresnel.
3. Exprimer la tension aux bornes du condensateur en fonction de $\underline{U_m}$ à l'aide d'un diviseur de tension.

Superposition

Théorème (de superposition)

Dans un circuit linéaire, alimenté par plusieurs sources sinusoïdales indépendantes, la valeur complexe $\underline{X}(t)$ d'une grandeur $X(t)$ (courant ou tension) est égale à la somme des valeurs complexes produites par chacune des différentes sources agissant séparément, toutes les autres sources étant éteintes.

Superposition

Théorème (de superposition)

Dans un circuit linéaire, alimenté par plusieurs sources sinusoïdales indépendantes, la valeur complexe $\underline{X}(t)$ d'une grandeur $X(t)$ (courant ou tension) est égale à la somme des valeurs complexes produites par chacune des différentes sources agissant séparément, toutes les autres sources étant éteintes.

☠ : il faut sommer tous les $X_{im}e^{j(\omega_i t+\varphi_{xi})}$ et pas seulement les amplitudes $X_{im}e^{j\varphi_{xi}}$ puisque ils ont chacun une pulsation différente.

Superposition

Théorème (de superposition)

Dans un circuit linéaire, alimenté par plusieurs sources sinusoïdales indépendantes, la valeur complexe $\underline{X}(t)$ d'une grandeur $X(t)$ (courant ou tension) est égale à la somme des valeurs complexes produites par chacune des différentes sources agissant séparément, toutes les autres sources étant éteintes.

- un dipôle traversé par $i(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2)$
- on calcule : $\underline{Z}(\omega_1) = Z_1 e^{j\varphi_{Z1}}$ et $\underline{Z}(\omega_2) = Z_2 e^{j\varphi_{Z2}}$
- la tension à ses bornes est alors :

$$u(t) = Z_1 A_1 \cos\left(\omega_1 t + \psi_1 + \varphi_{Z1}\right) + Z_2 A_2 \cos\left(\omega_2 t + \psi_2 + \varphi_{Z2}\right)$$

Superposition

Théorème (de superposition)

Dans un circuit linéaire, alimenté par plusieurs sources sinusoïdales indépendantes, la valeur complexe $\underline{X}(t)$ d'une grandeur $X(t)$ (courant ou tension) est égale à la somme des valeurs complexes produites par chacune des différentes sources agissant séparément, toutes les autres sources étant éteintes.

La décomposition en série de Fourier permet alors de déterminer la réponse à un signal périodique non sinusoïdal

Norton et Thévenin

Représentations de Norton et Thévenin

Un dipôle linéaire actif peut être en régime sinusoïdal établi, représenté en convention générateur par :

Thévenin	$\underline{U_m} = \underline{E_m} - \underline{Z}\underline{I_m}$
Norton	$\underline{I_m} = \underline{\eta_m} - \underline{Y}\underline{U_m}$

, avec $\underline{\eta_m} = \underline{E_m}/\underline{Z}$.

1. Impédance complexe

2. Lois générales des circuits linéaires en régime sinusoïdal établi

3. Puissance en régime sinusoïdal établi (HP)

En RSE, $u(t)$ et $i(t)$ sont nuls en moyenne mais la puissance reçue peut ne pas l'être :

- un résistor doit recevoir des PDC la puissance qu'il dissipe par effet Joule

En RSE, $u(t)$ et $i(t)$ sont nuls en moyenne mais la puissance reçue peut ne pas l'être :

- un résistor doit recevoir des PDC la puissance qu'il dissipe par effet Joule
- un pendule entretenu doit recevoir l'énergie qu'il dissipe par frottement

☠ On ne peut pas définir $\underline{\mathscr{P}_m}(t)$ telle que $\mathscr{P}(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{\mathscr{P}_m}(t)\right)$ de la même manière que pour $u(t)$ et $i(t)$.

Puissance active et facteur de puissance

Soit, en notation complexe, un dipôle d'impédance $\underline{Z} = Ze^{j\varphi_Z} = R + jS$ (resp. d'admittance $\underline{Y} = G + jB$) parcouru par un courant d'intensité $\underline{I}(t) = \underline{I_m}e^{j\omega t}$ et soumis à une tension $\underline{U}(t) = \underline{U_m}e^{j\omega t}$ (en convention récepteur).

La puissance moyenne qu'il reçoit, en régime sinusoïdal établi, nommée puissance active, s'exprime selon :

$$\begin{aligned} <\mathscr{P}>_T &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)i(t)\mathrm{d}t = \frac{U_m I_m \cos\varphi_Z}{2} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{U}(t)\overline{\underline{I}(t)}\right) = \frac{1}{2}RI_m^2 = \frac{1}{2}GU_m^2. \end{aligned}$$

On nomme facteur de puissance du dipôle la quantité $\cos\varphi_Z$.

Puissance active et facteur de puissance

La puissance moyenne qu'il reçoit, en régime sinusoïdal établi, nommée puissance active, s'exprime selon :

$$
\begin{aligned}
<\mathscr{P}>_T &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)i(t)\mathrm{d}t = \frac{U_m I_m \cos\varphi_Z}{2}\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{U}(t)\overline{\underline{I}(t)}\right) = \frac{1}{2}RI_m^2 = \frac{1}{2}GU_m^2.
\end{aligned}
$$

On nomme facteur de puissance du dipôle la quantité $\cos\varphi_Z$.

Posez le calcul de l'intégrale et vérifiez que ces expressions sont équivalentes

- la puissance active est une valeur moyenne, différente l'amplitude des oscillations de $\mathscr{P}$ à laquelle on ne s'intéresse pas
- ☠ : $G \neq \frac{1}{R}$
- expressions pour un résistor, un condensateur/bobine idéal ?
- Pour un résistor : $\cos\varphi = 1$, pour un condensateur/bobine idéal, $\cos\varphi = 0$
- On aura nécessairement $r \geqslant 0$ pour un dipôle passif

Valeurs efficaces

On pourrait caractériser les grandeurs sinusoïdales par leur amplitude, on choisit une autre grandeur (qui lui est proportionnelle) simplifiant les calculs de puissance.

Définition (Valeur efficace)

Pour une fonction $h(t)$ périodique de période T, on définit la valeur efficace h_{eff} de h par :

$$h_{\text{eff}} = \sqrt{< h(t)^2 >_T} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} h^2(t)\mathrm{d}t}.$$

Valeurs efficaces

Pour une fonction sinusoïdale, $h(t) = H_m \cos\left(\omega t + \varphi\right)$, on a :

$$h_{\text{eff}} = \frac{H_m}{\sqrt{2}}.$$

En particulier la puissance moyenne reçue, en régime sinusoïdal établi, par un dipôle de résistance R (de conductance G) s'exprime selon :

$$< \mathscr{P} >_T = RI_{\text{eff}}^2 = GU_{\text{eff}}^2.$$

Valeurs efficaces

$$< \mathscr{P} >_T = R I_{\text{eff}}^2 = G U_{\text{eff}}^2.$$

- L'intensité (resp. la tension) efficace est la valeur de l'intensité (resp. la tension) d'un courant stationnaire dissipant la même puissance dans la résistance R (resp. dans la conductance G).

Valeurs efficaces

$$< \mathscr{P} >_T = R I_{\text{eff}}^2 = G U_{\text{eff}}^2.$$

- L'intensité (resp. la tension) efficace est la valeur de l'intensité (resp. la tension) d'un courant stationnaire dissipant la même puissance dans la résistance R (resp. dans la conductance G).
- Les valeurs efficaces (parfois notées r.m.s. pour root-mean-square) sont celles affichées par un multimètre en mode sinusoïdal (AC)

Valeurs efficaces

$$< \mathscr{P} >_T = RI_{\text{eff}}^2 = GU_{\text{eff}}^2.$$

- L'intensité (resp. la tension) efficace est la valeur de l'intensité (resp. la tension) d'un courant stationnaire dissipant la même puissance dans la résistance R (resp. dans la conductance G).
- Les valeurs efficaces (parfois notées r.m.s. pour root-mean-square) sont celles affichées par un multimètre en mode sinusoïdal (AC)
- Le 230 V d'EDF est la *valeur efficace* de la tension sinusoïdale du secteur

Indispensable

- impédances des dipôles linéaires de base
- expressions de la puissance : ☠ $<\mathscr{P}> \neq U_m I_m$ si la réactance n'est pas nulle
- réviser les théorèmes en régime établi stationnaire
- constructions de Fresnel